ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΔR Μ. Ε.

Δικαιουλάκος Βασίλειος

Αριστομένους 65, τηλ. 27210 86210 www.dikaioulakos.gr

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ-ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Επιμέλεια: **ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

Τις απαντήσεις θα τις βρείτε στο eleftheriaonline.gr

Μιγαδικοί αριθμοί

1.01☐ Ο αριθμός $1+i$ **δεν** είναι **φανταστικός**.

1.02☐ Ο αριθμός i **δεν** είναι **μιγαδικός**.

1.03☐ Ο αριθμός $2i$ είναι **μικρότερος** από τον αριθμό $3i$ αφού $2<3$

1.04☐ Ο αριθμός $2i$ είναι **θετικός φανταστικός**.

1.05☐ Ο αριθμός 2 είναι **θετικός** μιγαδικός αριθμός.

1.06☐ Ο αριθμός $2i$ έχει **εικόνα** το σημείο $M(0,2)$

1.07☐ Ο αριθμός 0 **δεν** είναι **φανταστικός**.

1.08☐ Ο αριθμός $\sqrt{-i^2}$ **δεν** είναι **πραγματικός**.

1.09☐ Είναι $1+i=\sqrt{(1+i)^2}=\sqrt{1^2+2i+i^2}=\sqrt{1+2i-1}=\sqrt{2i}$

1.10☐ Είναι $\lambda i\neq -1$, για κάθε τιμή της πραγματικής παραμέτρου λ

1.11☐ Είναι $\alpha+\beta i\neq 0$ με $\alpha,\beta\in R$, μόνο αν $\alpha\neq 0$ και $\beta\neq 0$

1.12☐ $\overline{1}=1$

1.13☐ $\overline{i}=-i$

1.14☐ Το φανταστικό μέρος του $z=1+2i$, είναι το $Im(z)=2i$

1.15☐ Για τον αριθμό $z=\alpha+\beta i$ με $\alpha,\beta\in R$, είναι $Im(Re(z)i)=\alpha$

1.16☐ Για τον αριθμό $z=\alpha+\beta i$ με $\alpha,\beta\in R$, είναι $Re(Im(z)+Re(z)\cdot i)=Im(z)$

1.17☐ Οι **συζυγείς** των **πραγματικών**, είναι οι **ίδιοι** οι **πραγματικοί** αριθμοί.

1.18☐ $\overline{1+\kappa i}=1-\kappa i$ …αν $\kappa\in R$

1.19☐ $\overline{1+\kappa i}=1-\kappa i$ …αν $\kappa\in C$

1.20☐ Είναι $\overline{(i^{2004})}=\overline{(i)}^{2004}=(-i)^{2004}=i^{2004}=(i^4)^{501}=1^{501}=1$

1.21☐ Για δύο μιγαδικούς z_1,z_2 ισχύει: $z_1\cdot z_2=0\Leftrightarrow z_1=0$ ή $z_2=0$

1.22☐ Για δύο μιγαδικούς z_1,z_2 ισχύει $z_1^2=z_2^2\Leftrightarrow z_1=z_2$ ή $z_1=-z_2$

1.23☐ Η εικόνα του $z=\text{ημθ}+\text{συνθ}\,i$, **κινείται** στον κύκλο $x^2+y^2=1$

1.24☐ Αν η εικόνα του μιγαδικού z **κινείται** στην ευθεία $x=1$, τότε $z-1\in I$

1.25☐ Αν $z_1=\alpha_1+\beta_1 i$, $z_2=\alpha_2+\beta_2 i$, είναι $Re(z_1+z_2)=Re(z_1)+Re(z_2)$

1.26☐ Αν $z^2\in I$, τότε και $z\in I$

1.27☐ Αν $z_1,z_2\in C$ και $z_1+iz_2=0$, τότε $z_1=z_2=0$

1.28☐ Αν $i^5=i^\nu$ … ν :φυσικός, **υποχρεωτικά** θα είναι $\nu=5$

1.29☐ Αν για τους $z,w\in C$, είναι $z^2+w^2=0$ τότε $z=w=0$

1.30☐ Η εξίσωση $z^2+\alpha z-1=0$ με $\alpha\in R$, έχει **2 άνισες πραγματικές** ρίζες.

1.31☐ Η εξίσωση $z^2+\alpha z+\alpha^2=0$, με $\alpha\in R^*$, έχει δύο **μη πραγματικές** ρίζες.

1.32☐ Η εξίσωση $z^2-\alpha z+1=0$ με $\alpha\in R$ στο C, έχει **δύο ρίζες αντίστροφες**.

1.33☐ Οι **ρίζες** της εξίσωσης $z^2+\alpha z+1=0$ με $-2<\alpha<2$
στο επίπεδο, έχουν **εικόνες** σημεία **συμμετρικά** ως προς τον άξονα $x'x$

1.34☐ Αν για το μιγαδικό z είναι $z^3=1$, τότε θα είναι και $z=1$

1.35☐ Επειδή $1=i^6=(i^2)^{\frac{6}{2}}=(-1)^{\frac{6}{2}}=(-1)^3=-1$, στο C, είναι $1=-1$

1.36☐ Αν ο $z_1=1+i$ είναι **ρίζα** της εξίσωσης $z^2-2z+\lambda=0$ με $z\in C$, $\lambda\in R$
τότε και ο αριθμός $z_2=1-i$, είναι **ρίζα** της.

1.37☐ Αν ο $z_1=i+1$ είναι **ρίζα** της εξίσωσης $z(z-1)=\lambda$ με $\lambda\in R$
τότε και ο αριθμός $z_2=i-1$, είναι επίσης μία **ρίζα** της.

1.38☐ Έστω $\alpha v^2+\beta v+\gamma=0$, $\alpha w^2+\beta w+\gamma=0$ με $\alpha,\beta,\gamma\in R$ και $\beta^2<4\alpha\gamma$
Επειδή η εξίσωση $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ έχει σαν **ρίζες** τους v,w, είναι $v=\overline{w}$

1.39☐ $|1|=1$

1.40☐ $|i|=1$

Κλασική ανάλυση

2.01☐ Η **διαδικασία** f, με την οποία κάθε στοιχείο του R αντιστοιχίζεται με ένα στοιχείο ενός συνόλου A, είναι **συνάρτηση** από το A στο R

2.02☐ Η συνάρτηση $f(x)=1+x$, είναι **ίση** με τη συνάρτηση $g(t)=1+t$

2.03☐ Αν $f(x)=e^{2x}$, τότε θα είναι και $f(x^2)=e^{2x^2}$

2.04☐ Οι συναρτήσεις $f(x)=x^3$ και $g(x)=x^5$ είναι **ίσες**, στο $\Delta=\{-1,0,1\}$

2.05☐ Αν δύο συναρτήσεις **δεν είναι ίσες**, είναι **άνισες**.

2.06☐ Αν το 1 είναι **ρίζα** της f, τότε η C_f τέμνει τον $x'x$ στο $A(1,0)$

2.07☐ Για να **ανήκει** το σημείο $A(1,3)$ στο διάγραμμα C_f, πρέπει $f(3)=1$

2.08☐ Υπάρχει περίπτωση η ευθεία $(\varepsilon): y=1$, να τέμνει την C_f σε 2 σημεία.

2.09☐ Υπάρχει περίπτωση η ευθεία $(\varepsilon): x=1$, να τέμνει την C_f σε 2 σημεία.

2.10☐ Η γραφική παράσταση της $y=-x$, βρίσκεται **κάτω** από τον $x'x$

2.11☐ Η γραφική παράσταση της $f(x)=x^2$, **εφάπτεται** στον $x'x$

2.12☐ Αν $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$, τότε η C_f **δεν τέμνει** τον $x'x$

2.13☐ Αν $f(x)>x^2+1$ για κάθε $x\in R$, τότε η C_f δεν θα **τέμνει** τον $x'x$

2.14☐ Η **επίλυση** της εξίσωσης $f(x)=g(x)$
δίνει τις τετμημένες, των πιθανών **σημείων τομής** των διαγραμμάτων C_f και C_g

2.15☐ Αν η f ορίζεται στο R_+^*, τότε η C_f **δεν τέμνει** τον άξονα $y'y$

2.16☐ Αν η f ορίζεται στο R και είναι **περιττή**, τότε $f(0)=0$

2.17☐ Αν η συνάρτηση $\frac{1}{f}$ ορίζεται στο R, η εξίσωση $f(x)=0$ είναι **αδύνατη**.

2.18✱ Αν $f(x)=x^4-x^3-x+1$ και $g(x)=1$
τότε η συνάρτηση $f\circ g$, έχει τύπο ☐Α: x^4-x^3-x+1 ☐Β: 0 ☐Γ: -1 ☐Δ: 1

2.19✱ Έστω οι ορισμένες στο R συναρτήσεις f,g ώστε $f(x)g(x)=1$
Ορίζονται πάντα στο R, οι συναρτήσεις ☐Α: $\frac{1}{f}$ ☐Β: $\frac{1}{g}$ ☐Γ: $\sqrt{\frac{f}{g}}$ ☐Δ: $\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{g}}$

2.20☐ Αν η f είναι **γνήσια αύξουσα** στο R, τότε θα είναι και $f(1)<f(2)$

2.21☐ Αν για κάθε $x_1, x_2\in R^*$ με $x_1<x_2$ είναι και $f(x_1)<f(x_2)$
τότε είναι βέβαιο ότι η συνάρτηση f, θα είναι **γνήσια αύξουσα** στο R^*

2.22☐ Αν **υπάρχουν** αριθμοί $x_1, x_2\in R$ με $x_1<x_2$ και $f(x_1)<f(x_2)$
τότε είναι βέβαιο ότι η συνάρτηση f, θα είναι **γνήσια αύξουσα** στο R

2.23☐ Αν για κάθε $x_1, x_2\in R$ με $x_1>x_2$, διαπιστώνουμε ότι $f(x_1)>f(x_2)$
καταλήγουμε στο συμπέρασμα, ότι η f είναι **γνήσια φθίνουσα** στο R

2.24☐ Αν $f(x)<f(0)$ για κάθε $x<0$, τότε η f θα είναι **γνήσια αύξουσα** στο R_-

Όρια

3.01☐ Αν $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} g(x)\in R$, τότε «κοντά» στο 0 θα είναι $f(x)=g(x)$

3.02☐ Αν **υπάρχει** το $\lim_{x\to 0}(f(x)\cdot g(x))$, τότε θα είναι ίσο με $f(0)\cdot g(0)$

3.03☐ Αν $f(x)\leq 0$ για κάθε $x\in R$ και η συνάρτηση f έχει **όριο** στο σημείο 0
αποκλείεται να είναι $\lim_{x\to 0} f(x)>0$

3.04☐ Αν $\lim_{x\to 0} f(x)>0$, **αποκλείεται** η f να έχει **μόνο αρνητικές τιμές**.

3.05☐ Αν $-x^{2008}\leq f(x)\leq x^{2008}$, για κάθε $x\in R$
επειδή $\lim_{x\to 1}(-x^{2008})=-1$ και $\lim_{x\to 1}(x^{2008})=1$, **δεν** θα **υπάρχει** το όριο $\lim_{x\to 1} f(x)$

3.06☐ Αν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$, τότε $\lim_{x\to 0}(x\cdot f(x))=\lim_{x\to 0} x\cdot \lim_{x\to 0} f(x)=0$

3.07✱ Αν **δεν υπάρχει** το όριο $\lim_{x\to x_o}\left(\frac{x^3+x^2-2}{x^2-x}\right)$
τότε ☐Α: $x_o=0$ ☐Β: $x_o=2$ ☐Γ: $x_o=-2$ ☐Δ: $x_o=-1$ ☐Ε: $x_o=1$

3.08✱ Έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2+x+1}{4x^2+7}$
Η τιμή $f(2^{2004})$, προσεγγίζεται με **ικανοποιητική ακρίβεια**
από τον αριθμό: ☐Α: $1{,}4$ ☐Β: 10^2 ☐Γ: $0{,}75$ ☐Δ: $0{,}25$ ☐Ε: 0

3.09☐ Αν $\left(\lim_{x\to 0^-} f(x)\right)^2+\left(\lim_{x\to 0^+} f(x)\right)^2=\left(\lim_{x\to 0^-} f(x)\right)\left(\lim_{x\to 0^+} f(x)\right)\in R$, τότε $\lim_{x\to 0} f(x)=0$

3.10☐ Αν **υπάρχουν** τα $l_1=\lim_{x\to 0} f(x)$, $l_2=\lim_{x\to 0} g(x)$, τότε είναι $\lim_{x\to 0}(f(x)+g(x))=l_1+l_2$

3.11☞ Εξηγείστε **γιατί δεν γίνεται** να είναι $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$ και $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\text{ημ}x}=1$

3.12☐ Αν τα όρια $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ και $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ είναι **λύσεις**
της εξίσωσης $x^2+ax-1=0$ με $a\in R$, τότε **δεν υπάρχει** το $\lim_{x\to 0} f(x)$

3.13✱ Έστω η ορισμένη στο $(-\delta,0)\cup(0,\delta)$, με $\delta>0$ συνάρτηση f
Επιλέξτε την ορθή απάντηση ή τις ορθές απαντήσεις.

☐Α: Αν $\lim_{x\to 0} f(x)=1$, τότε και $\lim_{x\to 0} f^2(x)=1$

☐Β: Αν $\lim_{x\to 0} f^2(x)=100$, τότε $\lim_{x\to 0} f(x)=10$ ή $\lim_{x\to 0} f(x)=-10$

☐Γ: Αν $\lim_{x\to 0} f^2(x)=0$, τότε $\lim_{x\to 0} f(x)=0$

☐Δ: Αν $\lim_{x\to 0}\sqrt{f(x)}=1$, τότε $\lim_{x\to 0} f(x)=1$

☐Ε: Αν $\lim_{x\to 0} f(x)=1$, τότε $\lim_{x\to 0}\sqrt{f(x)}=1$

3.14✱ Έστω οι ορισμένες στο $(-\delta,0)\cup(0,\delta)$, με $\delta>0$ συναρτήσεις f, g
Επιλέξτε την ορθή απάντηση ή τις ορθές απαντήσεις.

☐Α: Αν $\lim_{x\to 0} f(x)>0$, τότε «κοντά» στο 0 είναι $f(x)>0$

☐Β: Αν $\lim_{x\to 0} f(x)>\lim_{x\to 0} g(x)$, τότε «κοντά» στο 0 είναι $f(x)>g(x)$

☐Γ: Αν κοντά στο 0 είναι $f(x)\geq g(x)$, τότε $\lim_{x\to 0} f(x)\geq \lim_{x\to 0} g(x)$
με την προϋπόθεση ότι **υπάρχουν** τα όρια.

☐Δ: Αν κοντά στο 0 είναι $f(x)\geq 0$ και **υπάρχει** το $\lim_{x\to 0} f(x)$, τότε $\lim_{x\to 0} f(x)\geq 0$

☐Ε: Αν κοντά στο 0 είναι $f(x)>0$ και **υπάρχει** το $\lim_{x\to 0} f(x)$, τότε $\lim_{x\to 0} f(x)>0$

3.15✱ Έστω οι ορισμένες στο $(-\delta,0)\cup(0,\delta)$, με $\delta>0$ συναρτήσεις f, g, h
Επιλέξτε την ορθή απάντηση ή τις ορθές απαντήσεις.

☐Α: Αν $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ «κοντά» στο 0 είναι $\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0} f(x)=0$, τότε $\lim_{x\to 0} h(x)=0$

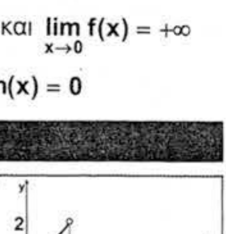
☐Β: Αν $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ «κοντά» στο 0 και $\lim_{x\to 0} f(x)=1$
τότε θα είναι υποχρεωτικά $\lim_{x\to 0} g(x)=1$ και $\lim_{x\to 0} h(x)=1$

☐Γ: Αν $g(x)\leq f(x)$ «κοντά» στο 0, και $\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$, τότε και $\lim_{x\to 0} g(x)=-\infty$

☐Δ: Αν $g(x)\leq f(x)$ «κοντά» στο 0, και $\lim_{x\to 0} g(x)=+\infty$, τότε και $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$

☐Ε: Αν $g(0)=f(0)=h(0)$, τότε και $\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} h(x)=0$

Συνέχεια



4.01 ✍ Να βρείτε τα σημεία –αν υπάρχουν
στα οποία η συνάρτηση του σχήματος, **δεν** είναι **συνεχής**.

4.02☐ Κάθε **πολυωνυμική** συνάρτηση, είναι **συνεχής** στο R

4.03☐ Αν η f ορίζεται στο R και $\lim_{x\to 0} f(x)=0$, αυτή είναι **συνεχής** στο 0

4.04☐ Αν η f ορίζεται στο R και $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} f(0)$, αυτή είναι **συνεχής** στο 0

4.05☐ Η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$, είναι **ασυνεχής** στο σημείο $x_o=0$

4.06☐ Αν μία συνάρτηση είναι **ασυνεχής** σε κάποιο σημείο του πεδίου ορισμού της, τότε σ΄ αυτό το σημείο **δεν** θα **υπάρχει** το **όριο** της.

4.07☐ Αν μία συνάρτηση είναι ορισμένη και **συνεχής** σε κάποιο **σύνολο** A
τότε είναι βέβαιο, ότι η γραφική παράστασή της, θα είναι μία **συνεχής γραμμή**.

4.08☐ Είναι φανερό ότι κάθε συνάρτηση είναι **συνεχής** στο **πεδίο ορισμού** της.

4.09☐ Αν η f είναι **συνεχής** στο A, τότε και η f^2 είναι **συνεχής** στο A

4.10☐ Αν οι συναρτήσεις f, $f+g$ είναι **συνεχείς** στο R, τότε η συνάρτηση g θα είναι **συνεχής** στο R

4.11☐ Αν η συνάρτηση $\frac{1}{2}f-g$ είναι **συνεχής** στο σημείο 0 και η συνάρτηση f
είναι **ασυνεχής** στο 0, τότε και η συνάρτηση $\frac{1}{2}f+g$ θα είναι **ασυνεχής** στο 0

4.12☐ Αν η συνάρτηση f είναι **συνεχής** στο $(-\infty,0)$ και **συνεχής** στο $[0,+\infty)$
τότε η συνάρτηση f θα είναι **συνεχής** σ' όλο το R

4.13☐ Αν η f είναι **συνεχής** στο R και $f(x)=\frac{x(x-1)}{x-1}$, $x\neq 1$ τότε $f(1)=1$

4.14☐ Αν η συνάρτηση f είναι **συνεχής** στο R, τότε η εξίσωση $f(x)=0$
έχει **πάντα λύση**.

4.15☐ Αν για τη **συνεχή** στο διάστημα $[0,1]$ συνάρτηση f, είναι $f(0)f(1)=\text{συν}2$
τότε η f θα έχει μία **τουλάχιστον ρίζα** στο $(0,1)$

4.16☐ Αν για τη συνάρτηση f **υπάρχει** διάστημα $\Delta=[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)f(\beta)<0$
τότε αυτή θα έχει **μία τουλάχστον ρίζα** στο ανοιχτό διάστημα (α,β)

4.17☐ Αν η **μη σταθερή** συνάρτηση f, είναι **συνεχής** στο διάστημα $\Delta=[\alpha,\beta]$
θα **υπάρχουν** αριθμοί $x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$ ώστε $f(x_1)\leq f(x)\leq f(x_2)$, για κάθε $x\in\Delta$

4.18☐ Αν η συνάρτηση f είναι **συνεχής** στο διάστημα $[0,1]$
και η εξίσωση $f(x)=0$ **δεν** έχει καμία **ρίζα** στο διάστημα $(0,1)$
και υπάρχει $\rho\in(0,1)$ ώστε $f(\rho)=\rho^2+1$, τότε για κάθε $x\in(0,1)$ θα είναι $f(x)>0$

4.19☐ Κάθε **συνεχής** στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ συνάρτηση f με $f(\alpha)\neq f(\beta)$
παίρνει **μόνο** τις τιμές **μεταξύ** των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$

4.20☐ Αν για μια **συνεχή** στο R συνάρτηση f είναι $f(-1)=-1$ και $f(1)=1$
τότε θα **υπάρχει** αριθμός $x_o\in(-1,1)$ ώστε $f(x_o)=0{,}000005$