ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΔR Μ. Ε.

Δικαιουλάκος Βασίλειος

Αριστομένους 65, τηλ. 27210 86210 www.dikaioulakos.gr



# ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ - ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Επιμέλεια: **ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

**1** Έστω η **συνεχής** συνάρτηση $f:(0+\infty)\to R$, με $f(1)=3$

Έστω και η συνάρτηση $F$, ώστε $F'(x)=f(x)$ και $f(x)F\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{x}$, για κάθε $x>0$

$A_1$) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=F(x)F\left(\frac{1}{x}\right)$ είναι **σταθερή** στο $(0,+\infty)$

$A_2$) Να αποδείξετε ότι $F(x)F\left(\frac{1}{x}\right)=1$, για κάθε $x>0$

Β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(x)=\frac{F(x)}{x^3}$ είναι **σταθερή** στο $(0,+\infty)$

Γ) Να **προσδιορίσετε** την $f$

**2** Η $f$ είναι **συνεχής** και **γνησίως αύξουσα** στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)>0$

Θεωρούμε και τη συνάρτηση $G(x)=(\beta-\alpha)\int_\alpha^x f(u)\,du - x\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$, $x\in[\alpha,\beta]$

$A_1$) Αποδείξτε ότι η $G$ είναι **παραγωγίσιμη** στο $[\alpha,\beta]$ και βρείτε την $g(x)=G'(x)$

$A_2$) Να αποδείξετε ότι υπάρχει **ένας ακριβώς** $x_o\in(\alpha,\beta)$ ώστε $g(x_o)=0$

Β) Να **αποδείξετε** ότι υπάρχει **μοναδική οριζόντια ευθεία** $(\varepsilon): y=f(x_o)$ ώστε το **χωρίο** $\Omega_1$ που ορίζεται από τις ευθείες $(\varepsilon)$, $(\zeta): x=\alpha$ και την $C_f$ να είναι **ισοδύναμο** με το **χωρίο** $\Omega_2$ που ορίζεται από τις $(\varepsilon)$, $(\delta): x=\beta$ και $C_f$

**3** Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x\ln x & \text{αν } x>0 \\ 0 & \text{αν } x=0\end{cases}$

Α) Να αποδείξετε ότι η $f$ είναι **συνεχής** στο διάστημα $[0,+\infty)$

$B_1$) Να βρείτε το **εμβαδόν** $E(\lambda)$ του χωρίου που ορίζεται από το διάγραμμα της $f$ τον άξονα $x'x$ την ευθεία $x=1$ και την ευθεία $x=\lambda$, με $0<\lambda<1$

$B_2$) Να βρείτε την τιμή του **ορίου** $\lim_{x\to 0^+} E(\lambda)$

Γ) Να αποδείξετε ότι **κάθε παράγουσα** $F$ της συνάρτησης $f$ είναι της μορφής $F(x)=\frac{x}{2}f(x)-\frac{1}{4}x^2+c$ για κάθε $x\in R_+$ ... $c\in R$

Δ) Να βρείτε το **εμβαδόν** του χωρίου που ορίζεται από την $C_f$ και τον άξονα $x'x$

**4** Έστω η συνάρτηση $f$ με τύπο $f(x)=\kappa e^x - x - \kappa$

$A_1$) Αν $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in R$, να αποδείξετε ότι $\kappa=1$

$A_2$) Να αποδείξετε ότι **δεν υπάρχει** $\kappa\in R$ ώστε $f(x)\le 0$ για κάθε $x\in R$

$B_1$) Να αποδείξετε πρώτα ότι $(e^x-1)x^{-1}>1$ για κάθε $x>0$

$B_2$) Να βρείτε τον **μικρότερο** $\kappa>0$, ώστε $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in R_+^*$

$\Gamma_1$) Να αποδείξετε πρώτα ότι $\ln x - x + 1\le 0$, για κάθε $x>0$

$\Gamma_2$) Να **βρείτε** το **πλήθος των ριζών** της $f$ ...για τις διάφορες τιμές του $\kappa$

**5** Έστω η ορισμένη στο $R$ συνάρτηση $f$ ώστε $e^{f(x)}+f(x)=x+1$, $x\in R$

Γνωρίζουμε ότι αυτή είναι **συνεχής** στο R

$A_1$) Να αποδείξετε ότι **υπάρχει** η $f^{-1}$ και να **βρείτε** τον **τύπο** της $f^{-1}$ στο $D=f(R)$

$A_2$) Να αποδείξετε ότι η $f$ είναι **γνήσια αύξουσα** στο $R$

$B_1$) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$B_2$) Να αποδείξετε ότι η **αντίστροφη** $f^{-1}$ **ορίζεται** τελικά στο διάστημα $D=R$

$B_3$) Να **λύσετε** τις εξισώσεις $f^{-1}(x)=0$ ... $f^{-1}(x)=e$ ... $f(x)=0$ ... $f(x)=x$

Γνωρίζουμε επίσης τώρα ότι η f είναι και **παραγωγίσιμη** στο R

$\Gamma_1$) Να αποδείξετε ότι $f(x)-x-2\ne 0$

$\Gamma_2$) Αφού αποδείξετε ότι $f'(x)\left(e^{f(x)}+1\right)=1$, μετά υπολογίστε το $I=\int_0^e\left(\frac{dx}{2+x-f(x)}\right)$

$\Gamma_3$) Υπολογίστε τα **όρια** $\lim_{x\to 0}\frac{e^{f(x)}-1}{x}$ και $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-x}{f(x)}$

$\Delta_1$) Να αποδείξετε ότι η $f$ είναι **δύο φορές παραγωγίσιμη** στο $R$

$\Delta_2$) Να αποδείξετε ότι η $f$ **στρέφει** τα **κοίλα κάτω** στο $R$

$\Delta_3$) Να αποδείξετε ότι $2f(x)\le x$, για κάθε $x\in R$

$E_1$) Να **παραστήσετε** την αντίστροφη $f^{-1}$ και την $f$, στο καρτεσιανό **επίπεδο**.

$E_2$) Υπολογίστε την **τιμή** του **ολοκληρώματος** $J=\int_0^e f(x)\,dx$

**6** Έστω η **συνεχής** και **μη σταθερή** στο $R$, συνάρτηση $f$

Θα αποδείξουμε ότι $\int_\alpha^\beta f^2(x)\,dx + 2\lambda\int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \lambda^2(\beta-\alpha)>0$ ... $\alpha<\beta$, $\lambda\in R$

και μετά ότι $\left(\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\right)^2<(\beta-\alpha)\int_\alpha^\beta f^2(x)\,dx$

## Απάντηση

$$\int_\alpha^\beta f^2(x)\,dx + 2\lambda\int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \lambda^2(\beta-\alpha) = \int_\alpha^\beta f^2(x)\,dx + 2\lambda\int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta \lambda^2\,dx$$

$$= \int_\alpha^\beta \left(f^2(x)+2\lambda f(x)+\lambda^2\right)dx = \int_\alpha^\beta (f(x)+\lambda)^2\,dx>0$$

Αφού $\alpha<\beta$, $(f(x)+\lambda)^2\ge 0$ και η $y=(f(x)+\lambda)^2$ **δεν** είναι προφανώς **μηδενική**.

Τώρα, αφού $(\beta-\alpha)^2\lambda^2+2\lambda\int_\alpha^\beta f(x)\,dx+\int_\alpha^\beta f^2(x)\,dx>0$ για κάθε $\lambda\in R$

και $\beta-\alpha>0$, θα πρέπει για τη διακρίνουσα $\Delta_\lambda$ του τριωνύμου να είναι $\Delta_\lambda<0$

ή $\left(2\int_\alpha^\beta f(x)dx\right)^2-4(\beta-\alpha)\int_\alpha^\beta f^2(x)dx<0 \Leftrightarrow \left(\int_\alpha^\beta f(x)dx\right)^2<(\beta-\alpha)\int_\alpha^\beta f^2(x)\,dx$